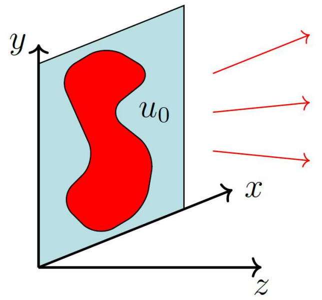
9. Tutorium

Montag, 13. Juni 2022 09:21

Beugungsoptik

- Wir wollen nun die Ausbreitung einer Feldverteilung im freien Raum untersuchen
  - ↳ Objekt und Bild liegen in der xy-Ebene $u_0(x,y)$
  - ↳ Ausbreitung in z-Richtung



- Das Feld bei $z>0$ wird meist durch seine Fourierkomponenten repräsentiert

$$u(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{U}(\alpha,\beta,z)}_{\text{Fourierkomponenten}} e^{i(\alpha x+\beta y)} \, d\alpha \, d\beta$$

- die Fourierkomponenten können in eine Amplitude und Phase zerlegt werden

$$\tilde{U}(\alpha,\beta,z) = \underbrace{\tilde{U}_0(\alpha,\beta)}_{\substack{\text{Amplitude} \\ \text{(i.A. komplex)}}} \underbrace{e^{i\sqrt{k^2-\alpha^2-\beta^2}\,z}}_{\text{Übertragungsfunktion}}$$

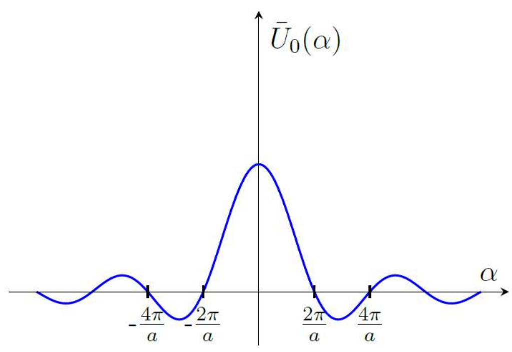
Übertragungsfunktion: entscheidet über die Ausbreitungsart
- $\alpha^2+\beta^2 \le k^2$ homogene Wellen
- $\alpha^2+\beta^2 > k^2$ evaneszente Wellen

- Berechnung der Amplitude: $\tilde{U}_0(\alpha,\beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x,y)\, e^{-i(\alpha x+\beta y)} \, dx\, dy$

→ Fouriertransformation der Anfangsfeldverteilung

Beispiel 1) 1D Spalt $\quad u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le a/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

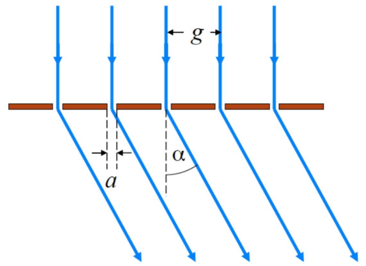
- In der Vorlesung wurde hergeleitet: $\tilde{U}_0(\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} \sin\left(\frac{a}{2}\alpha\right)$
  - ↳ Mit der Form des Beugungsmusters lässt sich eine Bedingung für die Auflösung aufstellen
  - ↳ es muss ein k-Vector verwendet werden, sodass die erste Nullstelle des Fourierspektrums noch übertragen wird



$$\frac{2\pi}{a} < k = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \quad \Rightarrow \quad a > \frac{\lambda_0}{n}$$

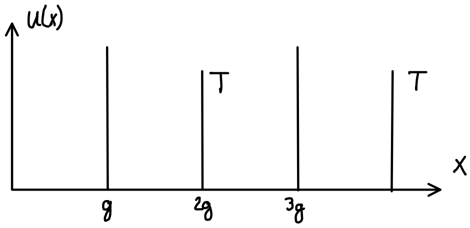
⇒ es können nur Strukturen größer als die Wellenlänge des Lichtes aufgelöst werden

Beispiel: Fourierspektrum eines 1D Gitters



Für den Fall, dass die Spaltbreite des Gitters a viel kleiner als die Gitterkonstante g ist $a \ll g$

Jeder zweite Spalt ist nur teildurchlässig mit Transmission T



$$\tilde{U}_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; u_0(x) \; e^{-i\alpha x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\delta(x-2ng)T + \delta(x-(2n+1)g)\right] e^{-i\alpha x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-2in\alpha g} T + \underbrace{e^{-i(2n+1)\alpha g}}_{e^{-2in\alpha g}\, e^{-i\alpha g}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2in\alpha g}}_{\text{Diese unendliche Reihe ist die Fourierreihe eines Dirac Kamms}} \left(T + e^{-i\alpha g}\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A\,\delta(\alpha - nA) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n \alpha \frac{1}{A}}}$$ mit $A = \frac{\pi}{g}$ folgt

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{g} \delta\left(\alpha - \frac{n\pi}{g}\right) \left(T + e^{-i\alpha g}\right)$$

Gaußförmige Strahlen:

Wir betrachten im Folgenden eine gaußförmige Feldverteilung $u_0(x,y) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{W_0^2}\right)$

→ Das Fourierspektrum ist ebenfalls gaußförmig:

$$\tilde{U}_0(\alpha,\beta) = A_0 \frac{W_0^2}{4\pi} \exp\left[-\frac{W_0^2}{4}(\alpha^2+\beta^2)\right]$$

→ für das auftretende Integral wird die paraxiale Näherung verwendet: $\sqrt{k^2-(\alpha^2+\beta^2)} \approx k - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2k}$

$$\Rightarrow u(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta \; \underbrace{\tilde{U}_0(\alpha,\beta)\, e^{i\sqrt{k^2-\alpha^2-\beta^2}\,z}}_{A_0 \frac{W_0^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{W'^2}{4}(\alpha^2+\beta^2)\right) e^{ikz}} \; e^{i(\alpha x + \beta y)}$$

mit $W'^2 = W_0^2 + \frac{2iz}{k}$

$$= W_0^2\left(1 + i\frac{z}{z_R}\right)$$

$$\boxed{z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}}$$

Rayleigh-Länge

auch Beugungsparameter genannt

$$= e^{ikz} \frac{W_0^2}{W'^2} A_0 \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W'^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y,z) = e^{ikz} \frac{A_0}{1+i\frac{z}{z_R}} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2\left(1+i\frac{z}{z_R}\right)}\right]}$$

Trennung von Real- und Imaginärteil:

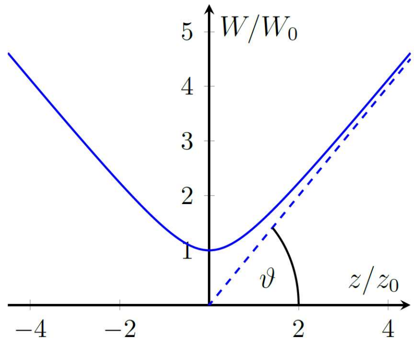
$$u(x,y,z) = \frac{e^{ikz}e^{i\varphi}A_0}{\sqrt{1+(z/z_0)^2}} \exp\underbrace{\left[-\frac{x^2+y^2}{W_0^2(1+(z/z_0)^2)}\right]}_{\text{Transversales Strahlprofil}} \exp\left[i\frac{z}{z_0}\frac{x^2+y^2}{W_0^2(1+(z/z_0)^2)}\right]$$

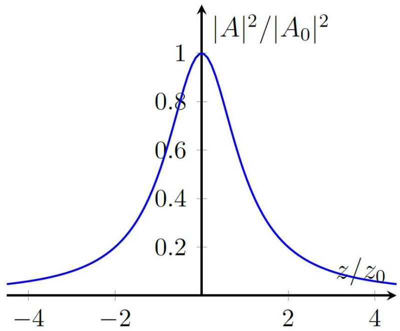
mit $\varphi = -\arctan(z/z_0)$. $\propto$ Leistung

$z_0 \equiv z_R$

Strahlbreite: $W(z) = W_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$

Bei $z = z_R$ verbreitert sich der Strahl um den Faktor $\sqrt{2}$.





Leistung auf der Strahlachse:

$$|A(z)|^2 = \frac{|A_0|^2}{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

Bei $z = z_R$ halbiert sich die Leistung auf der Strahlachse